

## Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики

С. К. Годунов (Москва)

### Введение

Метод характеристик, применяющийся для численного расчета решений уравнений гидромеханики, отличается большой нестандартностью и поэтому неудобен для автоматизированных вычислений на электронных счетных машинах, особенно в задачах с большим числом ударных волн и контактных разрывов.

В 1950 г. Нейманом и Рихтмейером в работе [1] было предложено применять для расчета уравнений гидромеханики разностные уравнения, в которых искусственно вводилась вязкость, размазывавшая ударные волны на несколько счетных точек. При этом счет предполагалось вести сплошным образом через ударные волны.

В 1954 г. Лакс [2] опубликовал пригодную для счета через ударные волны схему «треугольник». Недостатком этой схемы является то, что она не допускает счета со слишком мелким шагом по времени (по сравнению с шагом по пространству, деленным на скорость звука), превращая в этом случае любые начальные данные в линейные функции. Кроме того, эта схема размазывает контактные разрывы.

Настоящая работа ставит своей целью выбор в некотором смысле наилучшей схемы, допускающей счет через ударные волны. Этот выбор производится для линейных уравнений, а затем по аналогии схема переносится и на общие уравнения гидродинамики.

По предлагаемой схеме было проведено большое число расчетов на советских электронных вычислительных машинах. Для контроля некоторые из этих расчетов сравнивались с расчетами по методу характеристик. Совпадение результатов было вполне удовлетворительным.

Как мне стало известно благодаря любезности Н. Н. Яненко, он тоже занимался исследованием схемы расчета гидродинамических задач, близкой к предлагаемой в этой работе.

### Глава I

#### Разностные схемы для линейных уравнений

##### § 1. Одно новое требование к разностным схемам

Для решения дифференциальных уравнений математической физики часто применяется метод конечных разностей. Естественно требовать от решения, полученного приближенно, чтобы качественное его поведение

было аналогично поведению точного решения дифференциального уравнения. Однако это требование не всегда выполняется.

Например, рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Если в начальный момент температура  $u$  была монотонной функцией  $x$ , то она, очевидно, останется такой и во все последующие моменты времени. При решении же этого уравнения при помощи конечно-разностной схемы, устойчивой и достаточно точной, может случиться, что при температуре  $u$ , монотонной в начальный момент времени, в последующие моменты появятся максимумы или минимумы температуры.

Возьмем в качестве примера схему:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{\tau}{2h^2} (u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^n + u_{m-1}^{n+1}) + \frac{\tau}{2h^2} (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n),$$

где  $u_m^n$  — значение температуры  $u$  в точке с координатами  $x = mh$ ,  $t = n\tau$ . Эта схема устойчива при всех положительных  $r = \frac{\tau}{h^2}$ . Возьмем следующие начальные данные:

$$u_m^0 = 0 \quad \text{при } m > 0,$$

$$u_m^0 = 1 \quad \text{при } m \leq 0.$$

Для величин  $u_m^1$  на первом шаге по времени мы получаем бесконечную систему уравнений, решив которую, найдем:

$$u_m^1 = 1 - \frac{2r}{2r+1+\sqrt{2r+1}} \left( \frac{1+r-\sqrt{2r+1}}{r} \right)^{-m} \quad \text{при } m \leq 0,$$

$$u_m^1 = \frac{2r}{2r+1+\sqrt{2r+1}} \left( \frac{1+r-\sqrt{2r+1}}{r} \right)^{m-1} \quad \text{при } m > 0.$$

При  $m$ , стремящемся к  $+\infty$ ,  $u_m^1$  стремится к 0, а при  $m$ , стремящемся к  $-\infty$ ,  $u_m^1$  стремится к 1. Анализом полученного решения нетрудно показать, что его монотонность будет всегда нарушена при  $r > \frac{3}{2}$ .

Естественно, что эту схему при  $r > \frac{3}{2}$  нельзя считать вполне удовлетворительной. Однако нужно заметить, что эффекты, связанные с немонотонностью, будут проявляться только при решении задач с резко меняющимися начальными данными. Гладкие решения эта схема при достаточно мелких шагах будет рассчитывать достаточно точно.

Аналогичные факты имеют место и для разностных схем, предназначенных для получения решений уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Как известно, решение этого уравнения имеет вид стационарной волны  $u = u(x + t)$ , и, если  $u$  было монотонным при  $t = 0$ , то оно таковым и останется впоследствии.

Рассмотрим примеры разностных схем для этого уравнения и проверим, сохраняют ли они монотонность решения.

1. Схема «треугольник» первого порядка точности:

$$u^0 = \frac{u_1 + u_{-1}}{2} + \frac{\tau}{2h} \cdot (u_1 - u_{-1}). \quad *$$

Ее, очевидно, можно переписать так:

$$u^0 = \frac{1+r}{2} \cdot u_1 + \frac{1-r}{2} \cdot u_{-1},$$

где  $r = \frac{\tau}{h}$  (условие устойчивости этой схемы:  $r \leq 1$ ). Возьмем начальные данные при  $t = 0$  в виде ступеньки:

$$u_k = 0 \quad \text{при } k \leq 0,$$

$$u_k = 1 \quad \text{при } k \geq 1,$$

и вычислим  $u$  при  $t = \tau$ . Мы получим:

$$u^k = 0 \quad \text{при } k \leq -1,$$

$$u^0 = \frac{1+r}{2},$$

$$u^1 = \frac{1+r}{2}.$$

$$u^k = 1 \quad \text{при } k \geq 2.$$

Так как при  $r \leq 1$   $\frac{1+r}{2} \leq 1$ , то мы видим, что монотонность в этом случае не нарушилась.

Любую монотонную функцию на сетке с шагом  $h$  можно представить в виде суммы ступенчатых функций, каждая из которых меняет свои значения только на одном из интервалов сетки, и эти ступенчатые функции являются либо все возрастающими, либо все убывающими. Пользуясь этим, мы можем заключить, что схема «треугольник» переводит любую монотонную функцию в монотонную.

2. Схема «тренога» второго порядка точности:

$$u^0 = u_0 + \frac{r}{2} (u_1 - u_{-1}) + \frac{r^2}{2} (u_1 - 2u_0 + u_{-1}).$$

---

\* Здесь и в дальнейшем мы будем обозначать:  $u_0 = u(t_0, x_0)$ ,  $u^0 = u(t_0 + \tau, x_0)$ ,  $u_1 = u(t_0, x_0 + h)$ ,  $u_{-1} = u(t_0, x_0 - h)$  и т. д.;  $\tau$  и  $h$  — шаги по времени и по пространству соответственно.

Эта схема устойчива при  $r \leq 1$ . Если мы опять возьмем ступеньку

$$u_k = 0 \quad \text{при } k \leq 0,$$

$$u_k = 1 \quad \text{при } k \geq 1$$

в качестве начальных данных при  $t = 0$ , то при  $t = \tau$  мы по этой схеме получим:

$$u^k = 0 \quad \text{при } k \leq -1,$$

$$u^0 = \frac{r + r^2}{2},$$

$$u^1 = 1 + \frac{r - r^2}{2},$$

$$u^k = 1 \quad \text{при } k \geq 2.$$

Так как  $r > r^2$  при  $r < 1$ , то  $u^1 > 1$ , и монотонность нарушилась.

Заметим, что схема второго порядка точности, дающая значение  $u^0$  через значения  $u_1, u_0, u_{-1}$ , — единственная, т. е. среди таких схем нет схем, переводящих каждую монотонную функцию в монотонную.

## § 2. Критерий для проверки условия монотонности

Сначала отметим, что разностные схемы могут быть как явные, так и неявные.

Явная схема выражает значение  $u$  в считаемой точке только через известные значения  $u$  в предыдущий момент времени. Для линейного уравнения с постоянными коэффициентами такая схема имеет вид:

$$u^k = \sum c_{n-k} u_n.$$

Сумма здесь может быть как конечной, так и бесконечной. В последнем случае разностная схема будет определена не на всех сеточных функциях  $\{u_m\}$ , а только на недостаточно быстро растущих с ростом номера  $m$ , причем допустимая скорость роста определяется скоростью убывания коэффициентов  $c_j$ : надо, чтобы ряд  $\sum c_{n-k} u_n$  сходиллся.

Неявная схема представляет из себя систему уравнений для определения неизвестных  $u^m$ , т. е. имеет вид

$$\sum a_{m-k} u^m = \sum b_{n-k} u_n.$$

Сумму в левой части мы предполагаем конечной.

В качестве примера неявной схемы, можно взять разностную схему для уравнения теплопроводности, разобранную в начале § 1 этой главы. Неявные схемы имеют для нас ценность лишь постольку, поскольку при их помощи единственным образом определяется  $u^k$ .

Мы будем искать  $\{u^k\}$  в классе последовательностей, ограниченных при  $|k| \rightarrow \infty$ . В этом классе единственность имеет, очевидно, место для всех схем, у которых разностные уравнения

$$\sum a_{m-k} z_m = 0$$

не имеют нетривиального ограниченного решения. Общее решение этих разностных уравнений, как это общеизвестно, имеет вид

$$z_m = \sum_i (A_{i,k_i} m^{k_i-1} + A_{i,k_i-1} m^{k_i-2} + \dots + A_{i,k_i-(k_i-1)}) \lambda_i^m,$$

где  $\lambda_i$  являются корнями кратности  $k_i$  уравнения

$$\sum a_j \lambda^j = 0.$$

Из рассмотрения формулы общего решения видно, что для обеспечения единственности необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$\sum a_j \lambda^j = 0$$

не имело корней, по модулю равных единице. В дальнейшем мы будем предполагать, что все разностные схемы, с которыми мы имеем дело, этому условию удовлетворяют.

Нетрудно показать, что каждую такую разностную схему можно разрешить относительно  $u^k$  и записать в виде:

$$u^k = \sum c_{n-k} u_n,$$

превратив таким образом в явную схему. Поэтому, хотя в этом и в следующем параграфе будут разбираться только явные схемы, полученные результаты могут быть непосредственно применены и к неявным схемам.

Схемами, связывающими более двух слоев, мы заниматься не будем.

Теперь мы дадим простой критерий, позволяющий легко проверить переводит ли какая-либо разностная схема монотонные функции в монотонные или нет.

*Для того чтобы разностная схема  $u^k = \sum c_{n-k} u_n$  переводила все монотонные функции в монотонные с тем же направлением роста, необходимо и достаточно, чтобы все  $c_m$  были неотрицательными.*

Доказательство. Пусть  $c_m \geq 0$  и  $\{u_n\}$  монотонна. Для определенности допустим, что  $\{u_n\}$  возрастает, т. е. что все  $u_n - u_{n-1}$  неотрицательны. Тогда

$$\begin{aligned} u^k - u^{k-1} &= \sum c_{n-k} u_n - \sum c_{n-k+1} u_n = \sum c_{n-k} u_n - \sum c_{n-k} u_{n-1} = \\ &= \sum c_{n-k} (u_n - u_{n-1}), \end{aligned}$$

т. е.  $u^k - u^{k-1} \geq 0$ . Таким образом, достаточность условия доказана.

Докажем необходимость. Пусть, например,  $c_{m_0} < 0$ . Положим

$$u_k = 1 \quad \text{при } k \geq m_0,$$

$$u_k = 0 \quad \text{при } k \leq m_0 - 1.$$

Тогда  $u^0 - u^{-1} = c_m < 0$ , что невозможно, если предполагать, что схема переводит монотонные последовательности в монотонные с тем же направлением роста. Необходимость доказана.

Нетрудно показать, что если все  $c_m \geq 0$  и  $\sum c_m = 1$ , то разностная схема обязательно устойчива. В самом деле,

$$\max |u^k| \leq \sum |c_{n-k}| \cdot \max |u_n|.$$

Так как при наших предположениях  $\max |c_m| \leq 1$ , то  $\sum |u^m| \leq \sum |u_m|$ , а это и значит, что схема устойчива.

Условие  $\sum c_m = 1$  является довольно естественным для схем, предназначенных для расчета решений, например, следующих уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

и означает, что решение этих уравнений  $u = \text{const}$  является также решением и разностных уравнений.

В качестве приложения полученного критерия монотонности дадим вывод наиболее точной схемы первого порядка точности для уравнения  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$ , выражающей значение  $u^0$  через  $u_0, u_1, u_{-1}$  и удовлетворяющей условию монотонности (как мы отметили в конце § 1, таких схем второго порядка нет).

Легко проверить, что общий вид [схемы первого порядка, в которой участвуют только названные точки, — следующий:

$$\begin{aligned} u^0 &= u_0 + \frac{r}{2} (u_1 - u_{-1}) + k (u_1 - 2u_0 + u_{-1}) = \\ &= \left(\frac{r}{2} + k\right) u_1 + (1 - 2k) u_0 + \left(k - \frac{r}{2}\right) u_{-1}. \end{aligned}$$

При  $k = \frac{r^2}{2}$  — это схема второго порядка точности, а при произвольном  $k$  ее остаточный член —  $\left(k - \frac{r^2}{2}\right) h^2 u_{xx}$ .

Таким образом, задача сводится к определению  $k$ , наименее отличающегося от  $\frac{r^2}{2}$  и такого, чтобы все коэффициенты схемы

$$u_0 = \left(\frac{r}{2} + k\right) u_1 + (1 - 2k) u_0 + \left(k - \frac{r}{2}\right) u_{-1}$$

были неотрицательными (это последнее нужно, чтобы схема удовлетворяла условию монотонности). Очевидно, надо взять  $k = \frac{r}{2}$ . В этом случае схема принимает вид:

$$u^0 = u_0 + \frac{r}{2} (u_1 - u_{-1}) + \frac{r}{2} (u_1 - 2u_0 + u_{-1}) = ru_1 + (1 - r) u_0.$$

Условием устойчивости этой схемы, как нетрудно проверить, будет  $r \leq 1$ . Интересно отметить еще один способ получения этой формулы. Если выпустить из точки  $(t_0 + \tau, 0)$ , в которой мы ищем  $u^0$ , прямую, являющуюся характеристикой уравнения  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$ , то она пересечет начальный слой  $t = t_0$  в точке  $(t_0, rh)$ , лежащей (при  $r < 1$ ) между точками  $(t_0, 0)$  и  $(t_0, h)$ , в которых заданы  $u_0$  и  $u_1$ . Значение  $u$  в этой точке, очевидно, равно  $u^0$ , так как  $u$  вдоль характеристики постоянно. Мы получим, следовательно, нашу схему, если будем получать  $u$  в точке  $(t_0, rh)$  линейной интерполяцией по значениям  $u_0$  и  $u_1$  в точках  $(t_0, 0)$  и  $(t_0, h)$ , а затем сносить результат по характеристике в точку  $(t_0 + \tau, 0)$ .

§ 3. Среди схем второго порядка точности для уравнения  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$  нет удовлетворяющих условию монотонности

В § 1 мы отметили, что для уравнения  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$  нет разностных схем второго порядка точности, выражающих  $u^0$  через  $u_1, u_0, u_{-1}$  и переводящих монотонные функции в монотонные. Теперь мы обобщим это утверждение и докажем, что для этого уравнения при  $r = \frac{\tau}{h} \neq 0, 1, 2, \dots$  вообще нет схем второго порядка точности, как явных, так и неявных, связывающих любое число точек в два последовательных момента времени, таких, чтобы они переводили все монотонные функции в монотонные.

Как мы отметили в начале § 2, не ограничивая общности, достаточно рассматривать лишь схемы вида

$$u^k = \sum C_{n-k} u_n.$$

Будем говорить, что эта схема — второго порядка точности, если она точна для начальных данных, являющихся многочленом второй степени, т. е. если при таких начальных данных результат вычисления по схеме совпадает со значением решения дифференциального уравнения в рассматриваемой точке.

Зададим

$$u(0, x) = \left(\frac{x}{h} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

В целых точках тогда

$$u_n = u(0, nh) = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Решение уравнения  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$  с этими начальными данными имеет вид

$$u(t, x) = \left(\frac{x+t}{h} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Пусть мы хотим вычислить по разностной схеме значение  $u^p = u(\tau, rh)$ . Так как мы предполагаем схему имеющей второй порядок точности, то

мы должны получить точное значение решения дифференциального уравнения, потому что начальные данные — многочлен второй степени, т. е. мы получим, что

$$u^p = \left(p + r - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Пользуясь разностной схемой, приходим к равенству

$$\left(p + r - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \sum c_{n-p} \left[\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right].$$

Если бы схема удовлетворяла условию монотонности, то все  $c_{n-p}$  были бы неотрицательными и, так как  $\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq 0$ , мы получили бы, что при всех целых  $p$   $\left(p + r - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq 0$ . На самом же деле это не так. Действительно, если  $l > -r > l - 1$ , где  $l$  — целое число, то

$$u^l = \left(l + r - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} < 0.$$

Полученное противоречие доказывает высказанное утверждение.

#### § 4. Построение наилучшей схемы для системы двух уравнений

Теперь мы перейдем к изучению системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = B \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1)$$

(коэффициенты  $A$  и  $B$  мы будем предполагать постоянными). Умножив второе уравнение на  $\lambda$  и прибавив к первому, получим:

$$\frac{\partial (u + \lambda v)}{\partial t} = \frac{A}{\lambda} \cdot \frac{\partial (\lambda v)}{\partial x} + \lambda B \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Если мы выберем  $\lambda = \pm \sqrt{\frac{A}{B}}$ , то будем иметь:

$$\frac{\partial \left(u + \sqrt{\frac{A}{B}} v\right)}{\partial t} = \sqrt{AB} \frac{\partial \left(u + \sqrt{\frac{A}{B}} v\right)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \left(u - \sqrt{\frac{A}{B}} v\right)}{\partial t} = -\sqrt{AB} \frac{\partial \left(u - \sqrt{\frac{A}{B}} v\right)}{\partial x}.$$

Каждое из полученных уравнений имеет общее решение в виде стационарной бегущей волны

$$u + \sqrt{\frac{A}{B}} v = F_+(x + \sqrt{AB} t),$$

$$u - \sqrt{\frac{A}{B}} v = F_-(x - \sqrt{AB} t).$$



Очевидно, что если  $u + \sqrt{\frac{A}{B}} v$  или  $u - \sqrt{\frac{A}{B}} v$  были монотонными в начальный момент времени, то они таковыми и останутся во все последующие моменты времени. Естественно поэтому наложить на разностную схему для уравнений (1) требование, чтобы она эту монотонность сохраняла.

Как нетрудно проверить, любая линейная разностная схема для системы (1), выражающая значения  $u^0, v^0$  через  $u_1, v_1, u_0, v_0, u_{-1}, v_{-1}$ , будет иметь вид:

$$\begin{aligned} u^0 &= u_0 + \frac{\tau A}{2h} (v_1 - v_{-1}) + K (v_1 - 2v_0 + v_{-1}) + L (u_1 - 2u_0 + u_{-1}), \\ v^0 &= v_0 + \frac{\tau B}{2h} (u_1 - u_{-1}) + M (v_1 - 2v_0 + v_{-1}) + N (u_1 - 2u_0 + u_{-1}). \end{aligned} \tag{2}$$

Схемы, использующие для вычисления  $u^0, v^0$  значения  $u$  и  $v$  в начальный момент времени более чем в трех точках, мы рассматривать не будем, так как при решении задач с граничными условиями эти схемы около границ потребуют значительных модификаций, что неудобно для стандартизированных машинных вычислений.

Умножив второе из уравнений (2) на  $\pm \sqrt{\frac{A}{B}}$  и прибавив к первому, получим:

$$\begin{aligned} \left(u \pm \sqrt{\frac{A}{B}} v\right)^0 &= \left(u \pm \sqrt{\frac{A}{B}} v\right)_0 \pm \frac{\tau \sqrt{AB}}{2h} \left[ \left(u \pm \sqrt{\frac{A}{B}} v\right)_1 - \left(u \pm \sqrt{\frac{A}{B}} v\right)_{-1} \right] + \\ &+ \frac{L + M \pm N \sqrt{\frac{A}{B}} \pm K \sqrt{\frac{B}{A}}}{2} \left[ \left(u \pm \sqrt{\frac{A}{B}} v\right)_1 - 2 \left(u \pm \sqrt{\frac{A}{B}} v\right)_0 + \right. \\ &+ \left. \left(u \pm \sqrt{\frac{A}{B}} v\right)_{-1} \right] + \frac{L - M \pm N \sqrt{\frac{A}{B}} \mp K \sqrt{\frac{B}{A}}}{2} \left[ \left(u \mp \sqrt{\frac{A}{B}} v\right)_1 - \right. \\ &\left. - 2 \left(u \mp \sqrt{\frac{A}{B}} v\right)_0 + \left(u \mp \sqrt{\frac{A}{B}} v\right)_{-1} \right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Возьмем сначала в формулах верхний знак. Пусть в начальный момент  $u + \sqrt{\frac{A}{B}} v = 0$  во всех точках, а  $u - \sqrt{\frac{A}{B}} v = 1$  во всех точках, кроме одной, в которой  $u - \sqrt{\frac{A}{B}} v \neq 1$ . Очевидно, что если  $L - M + N \sqrt{\frac{A}{B}} - K \sqrt{\frac{B}{A}} \neq 0$ , то значения  $u + \sqrt{\frac{A}{B}} v$  получатся отличными от нуля в трех точках, и, таким образом, монотонность  $u + \sqrt{\frac{A}{B}} v$  нарушится. Отсюда мы заключаем, что должно быть

$$L - M + N \sqrt{\frac{A}{B}} - K \sqrt{\frac{B}{A}} = 0.$$

Выбирая в (3) нижний знак и проводя аналогичные рассуждения, получим, что также необходимо, чтобы

$$L + M - N \sqrt{\frac{A}{B}} - K \sqrt{\frac{B}{A}} = 0.$$

Если мы введем обозначения:

$$L + M + N \sqrt{\frac{A}{B}} + K \sqrt{\frac{B}{A}} = g,$$

$$L - M + N \sqrt{\frac{A}{B}} - K \sqrt{\frac{B}{A}} = G,$$

то уравнения (3) примут вид:

$$\begin{aligned} (u + \sqrt{\frac{A}{B}}v)^0 &= (u + \sqrt{\frac{A}{B}}v)_0 + \frac{\tau\sqrt{AB}}{2h} \left[ (u + \sqrt{\frac{A}{B}}v)_1 - \right. \\ &- (u + \sqrt{\frac{A}{B}}v)_{-1} \left. \right] + g \left[ (u + \sqrt{\frac{A}{B}}v)_1 - 2(u + \sqrt{\frac{A}{B}}v)_0 + \right. \\ &\left. + (u + \sqrt{\frac{A}{B}}v)_{-1} \right], \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} (u - \sqrt{\frac{A}{B}}v)^0 &= (u - \sqrt{\frac{A}{B}}v)_0 - \frac{\tau\sqrt{AB}}{2h} \left[ (u - \sqrt{\frac{A}{B}}v)_1 - \right. \\ &- (u - \sqrt{\frac{A}{B}}v)_{-1} \left. \right] + G \left[ (u - \sqrt{\frac{A}{B}}v)_1 - 2(u - \sqrt{\frac{A}{B}}v)_0 + \right. \\ &\left. + (u - \sqrt{\frac{A}{B}}v)_{-1} \right]. \end{aligned}$$

Как мы показали в начале этого параграфа,  $u + \sqrt{\frac{A}{B}}v$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial (u + \sqrt{\frac{A}{B}}v)}{\partial t} = \sqrt{AB} \frac{\partial (u + \sqrt{\frac{A}{B}}v)}{\partial x}.$$

Так же, как мы выбирали наиболее точную схему для уравнения  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$  (см. § 2), переводящую монотонные функции в монотонные, можно убедиться, что для  $u + \sqrt{\frac{A}{B}}v$  наиболее точная схема с условием монотонности будет при  $g = \frac{\tau\sqrt{AB}}{2h}$ , а для  $u - \sqrt{\frac{A}{B}}v$  — при  $G = \frac{\tau\sqrt{AB}}{2h}$ . Подставив эти значения  $g$  и  $G$  в (3a) и сложив эти равенства, получим формулу для  $u^0$ , а вычтя из первого второе и умножив на  $\sqrt{\frac{B}{A}}$ , — формулу для  $v^0$ :

$$\begin{aligned} u^0 &= u_0 + \frac{\tau A}{2h} (v_1 - v_{-1}) + \frac{\tau\sqrt{AB}}{2h} (u_1 - 2u_0 + u_{-1}), \\ v^0 &= v_0 + \frac{\tau B}{2h} (u_1 - u_{-1}) + \frac{\tau\sqrt{AB}}{2h} (v_1 - 2v_0 + v_{-1}). \end{aligned} \quad (4)$$

## § 5. Физическая интерпретация построенной разностной схемы

Дадим теперь разностной схеме (4) физическую интерпретацию. Рассмотрим систему уравнений гидромеханики в лагранжевых координатах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial p(v)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - B \frac{\partial u}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $u$  — скорость,  $p$  — давление,  $v$  — удельный объем.

В случае, если  $p(v)$  — линейная функция

$$p(v) = -\frac{A}{B}(v - v_0) + p_0 \quad (6)$$

(это можно предполагать при расчете звуковых волн), система (5) совпадает с системой (1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= A \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= B \frac{\partial u}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1)$$

для которой и составлялась схема (4). Используя уравнение состояния (6) эту схему можно переписать так:

$$\begin{aligned} u^0 &= u_0 - \frac{\tau B}{h} \left[ \left( \frac{p_1 + p_0}{2} - \sqrt{\frac{A}{B}} \frac{u_1 - u_0}{2} \right) - \left( \frac{p_0 + p_{-1}}{2} - \sqrt{\frac{A}{B}} \frac{u_0 - u_{-1}}{2} \right) \right], \\ v^0 &= v_0 + \frac{\tau B}{h} \left[ \left( \frac{u_1 + u_0}{2} - \frac{p_1 - p_0}{2 \sqrt{\frac{A}{B}}} \right) - \left( \frac{u_0 + u_{-1}}{2} - \frac{p_0 - p_{-1}}{2 \sqrt{\frac{A}{B}}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} P_{m+\frac{1}{2}} &= \frac{p_{m+1} + p_m}{2} - \sqrt{\frac{A}{B}} \cdot \frac{u_{m+1} - u_m}{2}, \\ U_{m+\frac{1}{2}} &= \frac{u_{m+1} + u_m}{2} - \frac{p_{m+1} - p_m}{2 \sqrt{\frac{A}{B}}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда наша схема примет вид:

$$\begin{aligned} u^0 &= u_0 - \frac{\tau B}{h} \left( P_{\frac{1}{2}} - P_{-\frac{1}{2}} \right), \\ v^0 &= v_0 + \frac{\tau B}{h} \left( U_{\frac{1}{2}} - U_{-\frac{1}{2}} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

Оказывается, что величины  $P_{\frac{1}{2}}$  и  $U_{\frac{1}{2}}$  имеют наглядный физический смысл. Представим себе, что на участке между точками  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{3}{2}$  (т.е. между точками  $x = \frac{1}{2}h$  и  $x = \frac{3}{2}h$ ) значения  $u$  и  $p$  в начальный момент постоянны и равны  $u_1$ ,  $p_1$ , а между точками  $\frac{1}{2}$  и  $-\frac{1}{2}$  тоже пос-

тояны и равны  $u_0, p_0$ . Так как в точке  $\frac{1}{2}$  соприкасаются две части газа, вообще говоря, разными скоростями и давлениями, то в этой точке произойдет так называемый распад разрыва. Именно: вправо и влево от точки  $\frac{1}{2}$  пойдут звуковые волны со скоростью  $\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{AB}$  (это уравнение характеристик системы (1)). Перед этими волнами  $u$  и  $p$  будут оставаться постоянными и равными  $u_1, p_1$  перед волной, идущей вправо, и  $u_0, p_0$  перед волной, идущей влево. (Конечно, это постоянство будет сохраняться лишь до тех пор, пока волны, образовавшиеся при распаде разрыва в точке  $\frac{1}{2}$ , не столкнутся с волнами, образовавшимися в точках  $\frac{3}{2}$  и  $-\frac{1}{2}$ .) Между волнами, расходящимися из точки  $\frac{1}{2}$ , величины  $u$  и  $p$  будут постоянными, значения которых можно вычислить, пользуясь соотношениями, выполненными на звуковых волнах. Возьмем первое из наших уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial p(v)}{\partial x} = 0.$$

Из него следует, что по любому контуру

$$\oint u dx - B p(v) dt = 0.$$

В качестве следствия из этого интегрального тождества нетрудно получить, что разрывы  $u$  и  $p$  должны удовлетворять условию

$$[u] dx - B [p] dt = 0.$$

На волне, идущей вправо,  $\frac{dx}{dt} = \sqrt{AB}$ , и мы получаем:

$$[u] \sqrt{\frac{A}{B}} - [p] = 0,$$

а на волне, идущей влево,  $\frac{dx}{dt} = -\sqrt{AB}$  и

$$[u] \sqrt{\frac{A}{B}} + [p] = 0.$$

Обозначая значения  $u$  и  $p$  между расходящимися волнами через  $U$  и  $P$  соответственно, приходим к системе уравнений

$$(U - u_{\frac{1}{2}}) \sqrt{\frac{A}{B}} - (P - p_{\frac{1}{2}}) = 0,$$

$$(U - u_{\frac{1}{2}}) \sqrt{\frac{A}{B}} + (P - p_{-\frac{1}{2}}) = 0.$$

Решив ее, мы найдем:

$$P = \frac{p_1 + p_0}{2} - \sqrt{\frac{A}{B}} \cdot \frac{u_1 - u_0}{2},$$

$$U = \frac{u_1 + u_0}{2} - \frac{p_1 - p_0}{2\sqrt{\frac{A}{B}}}.$$

Мы видим, что  $U$  и  $P$  совпадают с  $U_{\frac{1}{2}}$ ,  $P_{\frac{1}{2}}$ , определенными по формулам (7) и входящими в нашу разностную схему (8). Таким образом, мы видим, что  $U_{\frac{1}{2}}$  и  $P_{\frac{1}{2}}$  являются значениями скорости и давления, выработавшимися в результате распада разрыва в области между расходящимися волнами, а следовательно, и в самой точке  $\frac{1}{2}$ , из которой эти волны выходят.

Интересно заметить, что выработавшиеся значения  $U_{\frac{1}{2}}$  и  $P_{\frac{1}{2}}$  будут оставаться постоянными до тех пор, пока на рассматриваемую границу не выйдут волны, образовавшиеся при распаде разрывов в соседних границах, т. е. в точках  $-\frac{1}{2}$  и  $\frac{3}{2}$ . Для рассматриваемой системы возмущения распространяются со скоростью звука  $\sqrt{AB}$ . Таким образом, чтобы за время  $\tau$  значения  $U_{\frac{1}{2}}$  и  $P_{\frac{1}{2}}$  оставались постоянными, необходимо, чтобы было  $\tau < \frac{h}{\sqrt{AB}}$ . Любопытно, что это неравенство совпадает с условием устойчивости для схемы (4).

Конечно, после окснчания промежутка времени  $\tau$  между точками  $\frac{1}{2}$  и  $-\frac{1}{2}$  величины  $u$  и  $v$  уже не будут постоянными. Обозначим их средние значения через  $u^0$  и  $v^0$ . Для их вычисления воспользуемся законом сохранения импульса, который даст первое из равенств (8), и законом сохранения объема, который дает второе из них.

Приведенная физическая интерпретация разностной схемы (4) послужит в дальнейшем основой при составлении расчетной схемы для общей системы уравнений гидромеханики.

## Глава II

### Приближенная схема для расчета обобщенных решений уравнений гидромеханики

#### § 1. Постановка задачи

Нашей задачей будет построение разностной схемы для плоских одномерных нестационарных уравнений гидромеханики (в форме Лагранжа)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial p(v, E)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - B \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \left( E + \frac{u^2}{2} \right)}{\partial t} + B \frac{\partial pu}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Как известно, эта система уравнений не всегда имеет гладкие решения даже при гладких начальных данных. Поэтому приходится включать в рассмотрение обобщенные решения с разрывами — ударными волнами.

Систему функций  $(u, v, E)$  будем называть, следуя С. Л. Соболеву, обобщенным решением системы (1), если для каждой бесконечно дифференцируемой функции  $\varphi(x, t)$ , отличной от нуля лишь в конечной подобласти области  $G$  определения функций  $u, v, E$ , имеют место равенства:

$$\begin{aligned} \iint_G \left[ u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + Bp(v, E) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dxdt &= 0, \\ \iint_G \left[ v \frac{\partial \varphi}{\partial t} - Bu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dxdt &= 0, \\ \iint_G \left[ \left( E + \frac{u^2}{2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + Bp(v, E) \cdot u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dxdt &= 0. \end{aligned}$$

Если функции  $u, v, E$  — кусочно-непрерывные, то эти требования эквивалентны тому, что по любому контуру

$$\left. \begin{aligned} \oint u dx - Bp dt &= 0, \\ \oint v dx + Budt &= 0, \\ \oint \left( E + \frac{u^2}{2} \right) dx - Bpudt &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

а это — обычная формулировка законов сохранения. Из законов сохранения легко, как это делается во всех курсах газовой динамики, установить соотношения на разрывах — ударных волнах:

$$\left. \begin{aligned} [\omega u - Bp] &= 0, \\ [\omega v + Bu] &= 0, \\ \left[ \omega \left( E + \frac{u^2}{2} \right) - Bpu \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь  $\omega = \frac{dx}{dt}$  — скорость волны, а  $[ ]$  означает разрыв величины — разность ее значений справа и слева от волны.

Отметим, что для обеспечения единственности решения надо еще наложить запрет на ударные волны разрежения, для чего достаточно потребовать выполнения по любому контуру следующего интегрального неравенства:

$$\oint S dx \leq 0,$$

где  $S$  — энтропия, определяемая известным из термодинамики способом как некоторая функция  $p$  и  $v$ .

Мы ставим себе задачу построить такую схему приближенного расчета для системы (1), чтобы при измельчении шагов полученные по этой схеме приближенные решения сходились к обобщенным решениям системы.

Разностную схему мы построим так, чтобы в линейном случае звуковых колебаний она совпадала со схемой, разобранный в предыдущей главе, переводящей монотонные волны в монотонные. Использование схем, не обладающих этим свойством, не представляется разумным, так как эффект немонотонности как раз и проявляется на резко меняющихся решениях, каковыми являются ударные волны. При попытках расчета ударных волн по схемам, не удовлетворяющим условию монотонности, получаются для ударных волн «горбатые» графики с пульсирующими при переходе от одного шага по времени к другому горбами (см., например, график в приложении I).

Иногда приходится вместо системы (1) рассматривать следующую систему уравнений гидромеханики:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial p(v)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - B \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (1a)$$

(такими уравнениями, например, описывается течение воды в так называемых мелких каналах).

Заметим, что читатель без труда сумеет перенести все наши рассуждения и выкладки на этот более простой случай. Отметим только, что в качестве условия единственности вместо закона возрастания энтропии

$\oint S dx \leq 0$  в этом случае надо потребовать выполнения закона диссипации энергии:

$$\oint \left( \frac{u^2}{2} - \int p dv \right) dx - B p u dt \geq 0.$$

## § 2. Описание расчетной схемы

Приступим теперь к описанию предлагаемой нами схемы.

Представим себе, что газ, процессы в котором мы предполагаем рассчитывать, разделен на ряд слоев при помощи точек с целыми номерами  $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ , а сами слои занумерованы «полуцелыми» номерами  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ . Величины  $u, v, E, p = p(v, E)$  будем предполагать в начальный момент внутри каждого слоя постоянными. На границе  $m$  между двумя соседними слоями с номерами  $m - \frac{1}{2}$  и  $m + \frac{1}{2}$  возникнет распад разрыва, в результате которого в точке  $m$  выработаются давление  $P_m$  и скорость  $U_m$ . (В отличие от § 5 главы I точки, в которых происходят распады разрыва, теперь занумерованы целыми номерами, а лежащие между ними слои газа — полуцелыми).

Правила расчета  $P$  и  $U$  приводятся в любом курсе газовой динамики (см, например, [3]). Формулы для  $P_m$  и  $U_m$  в удобном для нас виде мы приведем несколько позже в § 4.

После того, как  $P_m$  и  $U_m$  определены во всех целых точках, мы определим значения величин  $u, v, E$ , которые они будут принимать после того,

как пройдет промежуток времени  $\tau$ , по формулам, аналогичным формулам (8) гл. I:

$$\left. \begin{aligned} u^{m+\frac{1}{2}} &= u_{m+\frac{1}{2}} - \frac{\tau B}{h} (P_{m+1} - P_m), \\ v^{m+\frac{1}{2}} &= v_{m+\frac{1}{2}} + \frac{\tau B}{h} (U_{m+1} - U_m), \\ E^{m+\frac{1}{2}} &= E_{m+\frac{1}{2}} + \frac{(u_{m+\frac{1}{2}})^2}{2} - \frac{(u^{m+\frac{1}{2}})^2}{2} - \frac{\tau B}{h} (P_{m+1} U_{m+1} - P_m U_m). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь через  $h$  обозначен шаг схемы, т. е. разность лагранжевых координат двух соседних целых точек.

Так же, как и в главе I, мы должны отметить, что после окончания промежутка времени  $\tau$  величины между двумя соседними целыми точками уже не будут постоянными, и вычисляемые  $u^{m+\frac{1}{2}}$ ,  $v^{m+\frac{1}{2}}$ ,  $E^{m+\frac{1}{2}}$  представляют из себя лишь средние величины по слою, которые заменяют истинное распределение величин с некоторой точностью, характерной для описываемого метода приближенного расчета.

§ 3. Если при измельчении шагов разностные решения сходятся, то они сходятся к обобщенным решениям дифференциальных уравнений

Теперь, предполагая, что  $u$ ,  $v$ ,  $E$ , рассчитанные по схеме (4), сходятся при мельчении шагов к некоторым кусочно-гладким предельным функциям, мы покажем, что для этих предельных функций выполнены законы сохранения (2), т. е. что эти предельные функции являются обобщенными решениями системы (1) или (1а) \*.

Рассмотрим простейшие прямоугольные контуры вида, указанного пунктиром на фиг. 1. На этом чертеже крестиками отмечены «получелые» точки, помещенные в середине слоев, а кружочками — целые точки.

Из формулы (4) следует, что

$$h \sum_{A_1}^{A_2} u = h \sum_{A_3}^{A_4} u - B \sum_{A_4}^{A_2} P \tau + B \sum_{A_3}^{A_1} P \tau. \quad (5a)$$

Если при измельчении шагов сеточные функции  $u$ ,  $v$ ,  $E$ ,  $P$ ,  $U$  сходятся к некоторым предельным функциям точек плоскости (мы эти предельные функции будем обозначать теми же буквами, что и соответствующие сеточные), то из разностного закона сохранения (5a) следует, что для предельных функций по любому прямоугольному контуру

$$\oint u dx + B P dt = 0. \quad (5)$$

Из выполнения равенств (5) для произвольных прямоугольных контуров следует их выполнение вообще для произвольных контуров.

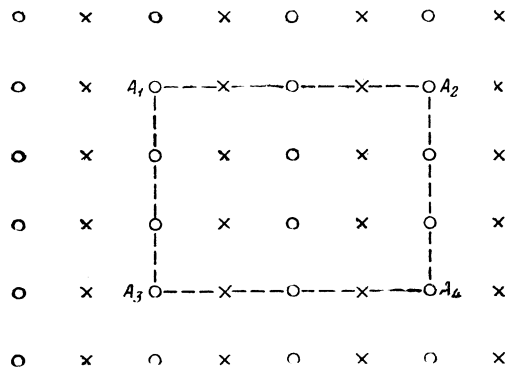
\* Выполнение для предельных функций закона возрастания энтропии (в случае, если рассчитывается система (1)) или закона диссипации энергии (если рассчитывается система (1a)) мы докажем в § 4.



Из выведенных в следующем параграфе формул для  $P$  и  $U$  следует, что если в областях гладкости решений дифференциальных уравнений сеточные функции  $u$ ,  $v$ ,  $E$  сходятся к этим решениям, то в этих областях предельные функции для  $P$  и  $p$  совпадают. Пользуясь этим и тем, что линии разрывов не могут повлиять на величины интегралов, мы из равенства (5) приходим к равенству

$$\oint u dx + B p dt = 0.$$

Аналогично показывается, что будут выполнены и остальные два из равенств (2).



Фиг. 1

Таким образом, мы доказали утверждение, сформулированное в заголовке этого параграфа.

§ 4. Формулы для расчета распада разрыва

Опишем теперь составление формул для  $P$  и  $U$ , причем для простоты ограничимся простейшем случаем газа с уравнением состояния

$$E = \frac{1}{(\gamma - 1)} p v.$$

Пусть справа от точки 0 расположен газ с удельным объемом  $v_{\frac{1}{2}}$ , внутренней энергией (на единицу массы)  $E_{\frac{1}{2}}$  и скоростью  $u_{\frac{1}{2}}$ .

Давление в этом газе

$$p_{\frac{1}{2}} = \frac{(\gamma - 1) E_{\frac{1}{2}}}{v_{\frac{1}{2}}}.$$

Состояние газа слева от точки 0 пусть определяется значениями

$$v_{-\frac{1}{2}}, \quad E_{-\frac{1}{2}}, \quad u_{-\frac{1}{2}}, \quad p_{-\frac{1}{2}} = \frac{(\gamma - 1) E_{-\frac{1}{2}}}{v_{-\frac{1}{2}}}.$$

Предположим сначала, что выработавшееся в результате распада разрыва давление  $P_0$  будет больше, чем  $p_{-\frac{1}{2}}$  и чем  $p_{\frac{1}{2}}$ . В этом случае и вправо

и влево из точки 0 пойдут ударные волны.

Как мы уже отмечали (см. формулы (3) в § 1 этой главы) на ударных волнах выполнены следующие соотношения:

$$[\omega u - Bp] = 0,$$

$$[\omega v + Bu] = 0,$$

$$\left[ \omega \left( E + \frac{u^2}{2} \right) - Bpu \right] = 0.$$

Введя обозначения:  $\frac{\omega_{\text{пр.}}}{B} = b_0$ ,  $\frac{\omega_{\text{лев.}}}{B} = -a_0$  ( $\omega_{\text{пр.}}$  — скорость волны, идущей вправо;  $\omega_{\text{лев.}}$  — скорость волны, идущей влево), мы можем переписать эти соотношения так:

$$\left. \begin{aligned} a_0 [u] + [p] &= 0, \\ a_0 [v] - [u] &= 0, \\ a_0 \left[ E + \frac{u^2}{2} \right] + [pu] &= 0 \end{aligned} \right\} \text{на левой волне,} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} b_0 [u] - [p] &= 0, \\ b_0 [v] + [u] &= 0, \\ b_0 \left[ E + \frac{u^2}{2} \right] - [pu] &= 0 \end{aligned} \right\} \text{на правой волне.} \quad (7)$$

В области между волнами  $u$  и  $p$  будут, как известно, постоянны и равны  $U$  и  $P$  — значениям на контактном разрыве, возникшем в точке 0. Значения удельного объема будут постоянными между контактным разрывом и волнами, но эти постоянные будут различны справа и слева от разрыва. Мы обозначим через  $v_{\text{пр.}}$  удельный объем между контактным разрывом и правой ударной волной и через  $v_{\text{лев.}}$  — удельный объем между контактным разрывом и левой ударной волной.

Первые из равенств (6) и (7) можно переписать так:

$$b_0 u_{\frac{1}{2}} - p_{\frac{1}{2}} = b_0 U_0 - P_0,$$

$$a_0 u_{-\frac{1}{2}} + p_{-\frac{1}{2}} = a_0 U_0 + P_0.$$

Если предполагать  $a_0$  и  $b_0$  известными, то  $U_0$  и  $P_0$  можно из этой системы определить:

$$P_0 = \frac{b_0 p_{-\frac{1}{2}} + a_0 \rho_{\frac{1}{2}} + a_0 b_0 \left( u_{-\frac{1}{2}} - u_{\frac{1}{2}} \right)}{a_0 + b_0},$$

$$U_0 = \frac{a_0 u_{-\frac{1}{2}} + b_0 u_{\frac{1}{2}} + p_{-\frac{1}{2}} - p_{\frac{1}{2}}}{a_0 + b_0}.$$

С другой стороны, если бы нам было известно  $P_0$ , то для определения  $a_0$  мы бы могли воспользоваться равенствами, которые получаются из первых двух соотношений (6) после исключения из них скорости:

$$a_0 = \sqrt{\frac{P_0 - p_{-\frac{1}{2}}}{v_{0 \text{ лев.}} - v_{-\frac{1}{2}}}}.$$

Значение  $v_{0 \text{ лев.}}$  может быть из этой формулы исключено с помощью адиабаты Гюгонио, получающейся из системы (6) способом, описание которого можно найти в любом курсе газовой динамики (см., например, [3]):

$$\frac{v_{0 \text{ лев.}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{(\gamma - 1) P_0 + (\gamma + 1) p_{-\frac{1}{2}}}{(\gamma + 1) P_0 + (\gamma - 1) p_{-\frac{1}{2}}}.$$

После подстановки  $v_{0 \text{ лев.}}$  в формулу для  $a_0$  мы получаем:

$$a_0 = \sqrt{\frac{(\gamma + 1) P_0 + (\gamma - 1) p_{-\frac{1}{2}}}{2v_{-\frac{1}{2}}}}.$$

Совершенно аналогично можно прийти к выводу, что

$$b_0 = \sqrt{\frac{(\gamma + 1) P_0 + (\gamma - 1) p_{\frac{1}{2}}}{2v_{\frac{1}{2}}}}.$$

Для определения  $P_0$  можно теперь воспользоваться следующим итерационным процессом: задавшись произвольным  $P_0$ , определяем  $a_0$  и  $b_0$  и по ним вычисляем новое значение  $P_0$ . Подставляя его в формулы для  $a_0$  и  $b_0$ , снова находим  $P_0$  и т. д., пока процесс не сойдется. После этого определяем  $U_0$ .

Мы пока рассмотрели только случай, когда одновременно  $P_0 > p_{-\frac{1}{2}}$ ,  $P_0 > p_{\frac{1}{2}}$ , т. е. когда при распаде разрыва не образуется волн разрежения.

Оказывается, что в случае, когда они образуются, можно рассчитывать распад тем же процессом, только изменив формулы для  $a_0$  и  $b_0$ .

Представим себе, например, что  $P_0 < p_{\frac{1}{2}}$ , т. е. что вправо идет волна разрежения. Через волну разрежения, как известно, выполнены соотношения

$$u_{\frac{1}{2}} - \frac{2c_{\frac{1}{2}}}{\gamma - 1} = U_0 - \frac{2c_{0 \text{ прав.}}}{\gamma - 1},$$

$$p_{\frac{1}{2}} v_{\frac{1}{2}}^{\gamma} = P_0 v_{0 \text{ прав.}}^{\gamma},$$

где  $c = \sqrt{\gamma p v}$  — скорость звука,  $c_{0 \text{ прав.}}$  и  $v_{0 \text{ прав.}}$  — правые значения  $c$  и  $v$  на контактном разрыве. Первое из этих равенств можно переписать так:

$$\frac{\frac{\gamma - 1}{2} \left( p_{\frac{1}{2}} - P_0 \right)}{c_{\frac{1}{2}} - c_{0 \text{ прав.}}} \cdot u_{\frac{1}{2}} - p_{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\gamma - 1}{2} \left( p_{\frac{1}{2}} - P_0 \right)}{c_{\frac{1}{2}} - c_{0 \text{ прав.}}} \cdot U_0 - P_0;$$

если обозначить

$$b_0 = \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{p_{\frac{1}{2}} - P_0}{c_{\frac{1}{2}} - c_{0 \text{ прав.}}},$$

то получится соотношение, совершенно аналогичное таковому через ударную волну.

Если в формуле для  $b_0$  выразить  $c$  через  $p$  и  $v$  и исключить  $v_{0 \text{ прав.}}$  при помощи адиабаты Пуассона (второе из приведенных нами соотношений через волну разрежения), то мы получим:

$$b_0 = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \sqrt{\frac{\gamma p_{\frac{1}{2}}}{v_{\frac{1}{2}}}} \cdot \frac{1 - \frac{P_0}{p_{\frac{1}{2}}}}{\left(1 - \frac{P_0}{p_{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}}}.$$

В случае, если бы и влево шла волна разрежения, мы должны были бы положить

$$a_0 = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \sqrt{\frac{\gamma p_{-\frac{1}{2}}}{v_{-\frac{1}{2}}}} \cdot \frac{1 - \frac{P_0}{p_{-\frac{1}{2}}}}{1 - \left(\frac{P_0}{p_{-\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}}}.$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что для определения  $P_0$  нам нужно решить при помощи итераций следующую систему:

$$\left. \begin{aligned}
 a_0 &= \begin{cases} \frac{(\gamma + 1) P_0^{(i-1)} + (\gamma - 1) p_{-\frac{1}{2}}}{2v_{-\frac{1}{2}}} & \text{при } P_0^{(i-1)} \geq p_{-\frac{1}{2}}, \\ \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \sqrt{\frac{\gamma p_{-\frac{1}{2}}}{v_{-\frac{1}{2}}}} \cdot \frac{1 - \frac{P_0^{(i-1)}}{p_{-\frac{1}{2}}}}{1 - \left(\frac{P_0^{(i-1)}}{p_{-\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}} & \text{при } P_0^{(i-1)} < p_{-\frac{1}{2}}, \end{cases} \\
 b_0 &= \begin{cases} \sqrt{\frac{(\gamma + 1) P_0^{(i-1)} + (\gamma - 1) p_{\frac{1}{2}}}{2v_{\frac{1}{2}}}} & \text{при } P_0^{(i-1)} \geq p_{\frac{1}{2}}, \\ \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \sqrt{\frac{\gamma p_{\frac{1}{2}}}{v_{\frac{1}{2}}}} \cdot \frac{1 - \frac{P_0^{(i-1)}}{p_{\frac{1}{2}}}}{1 - \left(\frac{P_0^{(i-1)}}{p_{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}} & \text{при } P_0^{(i-1)} < p_{\frac{1}{2}}, \end{cases} \\
 P_0^{(i)} = \varphi(P_0^{(i-1)}) &= \frac{b_0^{(i-1)} p_{-\frac{1}{2}} + a_0^{(i-1)} p_{\frac{1}{2}} + a_0^{(i-1)} b_0^{(i-1)} \left(u_{-\frac{1}{2}} - u_{\frac{1}{2}}\right)}{a_0^{(i-1)} + b_0^{(i-1)}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

После того как итерации сошлись и мы вычислили окончательные  $P_0$ ,  $a_0$ ,  $b_0$ , мы найдем  $U_0$  по формуле

$$U_0 = \frac{a_0 u_{-\frac{1}{2}} + b_0 u_{\frac{1}{2}} + p_{-\frac{1}{2}} - p_{\frac{1}{2}}}{a_0 + b_0}.$$

Детальное исследование сходимости итерационного процесса  $P_0^{(i)} = \varphi(P_0^{(i-1)})$  показывает, что этот процесс сходится, если в результате распада не получается очень сильных волн разрежения. Для того чтобы сделать его сходящимся во всех случаях, надо вести итерации по несколько видоизмененным формулам, например по следующим:

$$P_0^{(i)} = \frac{\alpha^{(i-1)} P_0^{(i-1)} + \varphi(P_0^{(i-1)})}{\alpha^{(i-1)} + 1},$$

где

$$\alpha^{(i-1)} = \begin{cases} \frac{\gamma-1}{3\gamma} \cdot \frac{1-z_{i-1}}{z_{i-1}^{\frac{\gamma+1}{2}} \left(1-z_{i-1}^{\frac{\gamma-1}{2}}\right)} - 1, & \text{если это выражение больше нуля,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$z_{i-1} = \frac{P_0^{(i-1)}}{P_{\frac{1}{2}} + P_{-\frac{1}{2}}}$$

Мы опустим это исследование сходимости, так как оно проводится стандартным способом исследования сходимости итерационных процессов типа  $x^i = f(x^{i-1})$ , что сводится к вычислению и исследованию громоздких выражений для производных.

Из формул (8) видно, что если  $u$  и  $r$  при измельчении шагов сходятся к ограниченным непрерывным функциям, то  $U$  и  $P$  сходятся к тем же пределам. Этим фактом мы уже пользовались при доказательстве того, что предельные функции являются обобщенными решениями уравнений гидродинамики.

В главе I мы привели формулы (7) для расчета звукового распада разрыва. Они совпадают с формулами настоящего параграфа, если положить

$$a_0 = b_0 = \sqrt{\frac{A}{B}}.$$

При расчете звуковых волн мы должны были на шаги по времени наложить условие устойчивости

$$\tau \leq \frac{h}{\sqrt{AB}} = \frac{h}{B\sqrt{\frac{B}{A}}}.$$

Нам кажется естественным в разбираемом нелинейном случае пользоваться для шага по времени условием

$$\tau \leq \frac{h}{B \max(a_m, b_m)}.$$

Правда, определенное таким образом  $\tau$  лишь приближенно является временем, потребным для того, чтобы волны, возникшие при распаде в одной целой точке, дошли до соседней и изменили в ней выработавшиеся там при распаде  $U$  и  $P$ . Однако большое количество проведенных с учетом этого условия разнообразных просчетов убедительно показывает, что при этом ограничении на  $\tau$  счет устойчив. Кроме того, это условие совпадает с приведенным выше условием для линейной схемы в случае, если рассчитываются слабые («звуковые») волны.

Заметим, что если бы мы пожелали узнать истинное распределение величин  $u$ ,  $v$ ,  $E$  через время  $\tau$  после распада разрыва, то мы могли бы это сделать, решив элементарную газодинамическую задачу внутри каждого слоя. (Надо только, чтобы  $\tau$  не превосходило времени, потребного для того, чтобы волны распада в одной целой точке дошли до соседней.)

Особенно простым и даже всегда допускающим аналитическое выражение будет решение этой задачи, если  $\tau$  меньше времени, потребного для того, чтобы волны, вышедшие из соседних точек, встретились.

Как известно из элементов газодинамики, энтропия  $S$ , получившаяся при этом внутри слоя через время  $\tau$ , будет при всех  $x$  больше первоначальной:  $S(x) > S_{\frac{1}{2}}^n$  (если мы рассматриваем слой с номером  $\frac{1}{2}$ ). Вспоминая, что

$$S = c_v \ln E v^{\gamma-1} = c_v [\ln E + (\gamma - 1) \ln v],$$

и используя следующие простые неравенства:

$$\frac{\int_{x_1}^{x_2} \ln z(x) dx}{x_2 - x_1} \leq \ln \frac{\int_{x_1}^{x_2} z(x) dx}{x_2 - x_1} \quad (\text{вытекает из выпуклости графика } \ln z),$$

$$\left( \frac{\int_{x_1}^{x_2} u dx}{x_2 - x_1} \right)^2 \leq \frac{\int_{x_1}^{x_2} u^2 dx}{x_2 - x_1} \quad (\text{вытекает из вогнутости графика } u^2),$$

мы заключаем, что

$$\begin{aligned} S_{\frac{1}{2}}^n &\leq \frac{1}{h} \int_0^h S(x) dx \leq c_v \left[ \ln \frac{1}{h} \int_0^h E(x) dx + (\gamma - 1) \ln \frac{1}{h} \int_0^h v(x) dx \right] \leq \\ &\leq c_v \left\{ \ln \left[ \frac{1}{h} \int_0^h \left( E + \frac{u^2}{2} \right) dx - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h} \int_0^h u dx \right)^2 \right] + (\gamma - 1) \ln \frac{1}{h} \int_0^h v(x) dx \right\}. \end{aligned}$$

Теперь мы заметим, что  $\frac{1}{h} \int_0^h \left( E + \frac{u^2}{2} \right) dx - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h} \int_0^h u dx \right)^2, \frac{1}{h} \int_0^h v(x) dx$  представляют из себя средние значения  $E, v$ , которые мы при вычислении по нашей схеме приписываем «точке»  $\frac{1}{2}$  через шаг [по времени  $\tau$  и обозначаем через  $E_{\frac{1}{2}}^{n+1}, v_{\frac{1}{2}}^{n+1}$ . Мы приходим таким образом к неравенству

$$S_{\frac{1}{2}}^{n+1} = S \left( E_{\frac{1}{2}}^{n+1}, v_{\frac{1}{2}}^{n+1} \right) = c_v \left[ \ln E_{\frac{1}{2}}^{n+1} + (\gamma - 1) \ln v_{\frac{1}{2}}^{n+1} \right] \geq S_{\frac{1}{2}}^n. \quad (9)$$

Проводя рассуждения, аналогичные проведенным в § 3 при доказательстве интегральных законов сохранения, мы пользуясь тем, что в каждой счетной точке выполнены неравенства типа (9), сможем показать, что после стремления шага разностной сетки к нулю, для предельного решения будет выполнено по каждому контуру интегральное неравенство

$$\oint S dx \leq 0$$

(условие, обеспечивающее единственность).

В случае системы (1а) мы подобными рассуждениями смогли бы также оправдать выполнение соответствующего условия единственности \*.

### § 5. Расчет эйлеровых координат

Обычно при решении системы (1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial p(v, E)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - B \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \left( E + \frac{u^2}{2} \right)^2}{\partial t} + B \frac{\partial p u}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

приходится решать еще уравнение для эйлеровых координат частиц газа

$$\frac{\partial r}{\partial t} = u.$$

Мы предлагаем определять  $r$  в целых точках по формуле

$$r^m = r_m + \tau U_m.$$

Интересно отметить, что из предыдущей формулы и (4) следует, что если в начальный момент

$$v_{m+\frac{1}{2}} = \frac{B}{h} (r_{m+1} - r_m), \quad (10)$$

то это равенство будет выполнено и во все последующие моменты времени. Его смысл заключается в том, что объем слоя газа можно определить, зная положение его границ.

Равенство (10) может быть использовано для определения  $v$  вместо второй из формул (4). При расчете на электронных машинах формулой (10) пользоваться даже удобней, так как это уменьшает количество запоминаемых на каждом шагу величин.

### § 6. Некоторые результаты численных расчетов

В приложении II приведены результаты расчета движения стационарной ударной волны, выполненного по формулам (4) и (8). Из графиков видно, что если начать расчет со ступеньки, удовлетворяющей условиям на ударной волне, со скачком, расположенным в точке 0, то через несколько шагов по времени вырабатывается стационарный профиль всех считааемых величин, который с течением времени перемещается со скоростью, равной скорости ударной волны, с таким же перепадом давлений и скоростей. Только вблизи точки 0 остается метка на графике  $v$ . Это объясняется тем, что в процес-

\* Факт, доказанный в этом параграфе и состоящий в том, что наша схема дает решения, удовлетворяющие закону возрастания энтропии, был впервые отмечен Л. И. Седовым при обсуждении этой работы на семинаре в МГУ.



се установления стационарного профиля схема «ошиблась» в энтропии, которая в гладкой области за фронтом волны сохраняется. В гладкой области схема достаточно точна, чтобы отразить это сохранение энтропии. После установления давление за фронтом волны выравнивалось, а так как  $pv^{\gamma}$  там неверное, то это и приводит к появлению метки на графике  $v$ .

Аналогичные энтропийные следы образуются и при расчете других нестационарных процессов, например, процесса образования ударной волны при ударе движущегося газа о жесткую стенку (см. приложение III). Эти энтропийные следы обычно захватывают две-три счетные точки и поэтому при достаточно мелком шаге не влияют на результаты расчетов.

### § 7. Один эффект, получающийся при расчете контактных разрывов

Все соображения, которые мы приводили при выборе нашей схемы, получались при рассмотрении случая постоянных шагов по  $x$  и в предположении, что весь рассчитываемый процесс происходит в безграничном газе; однако расчетная схема получилась столь физически наглядной, что трудно удержаться от желания применять ее и на границах раздела двух сред — контактных разрывах. Для этого достаточно включить контактный разрыв в число целых точек и при расчете  $a$  и  $b$  в этой точке пользоваться для  $a$  константами, характеризующими газ, лежащий слева от линии раздела, а для  $b$  — константами, относящимися к газу, лежащему справа.

Результаты проведенных нами расчетов показали, что использование так построенной схемы на контактных разрывах допустимо, хотя, как это не трудно проверить, ведет к понижению точности.

В этом параграфе мы хотим описать один эффект, являющийся следствием понижения точности, который был замечен при анализе расчетов вблизи контактных разрывов. Этот эффект проявлялся при расчете гладких решений, к ударным волнам он не имеет никакого отношения, и поэтому естественно пытаться его объяснить, исходя из предположения, что наша система уравнений может быть заменена близкой к ней линейной системой. Расчеты, основанные на такой линеаризованной системе уравнений, дали величину эффекта, совпадающую с наблюдавшейся при расчете газодинамических задач.

Пусть процессы в некотором газе описываются системой

$$\frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - B \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Уравнение состояния газа для случая малых колебаний давления допускает следующее линеаризованное представление:

$$p = p_0 - \frac{\gamma A}{B} (v - v_0).$$

Если воспользоваться этим уравнением состояния, можно систему (11) переписать так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Пусть  $x = 0$  будет контактным разрывом, т. е. пусть коэффициенты будут разными для  $x > 0$  и для  $x < 0$ . Положим

$$A = \begin{cases} A_+ & \text{при } x > 0, \\ A_- & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} B_+ & \text{при } x > 0, \\ B_- & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

Система уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + B_+ \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

при  $x > 0$ ,

$$\frac{\partial p}{\partial t} + A_+ \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + B_- \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

при  $x < 0$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + A_- \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

при условии непрерывности  $u$  и  $p$  в точке  $x = 0$  допускает следующее решение:

$$u = \frac{\alpha}{A_+} x - \beta t + \gamma,$$

для  $x > 0$ ,

$$p = \frac{\beta}{B_+} x - \alpha t + \pi$$

(12)

$$u = \frac{\alpha}{A_-} x - \beta t + \gamma,$$

для  $x < 0$ ,

$$p = \frac{\beta}{B_-} x - \alpha t + \pi$$

удовлетворяющее начальным условиям при  $t = 0$ :

$$u = \frac{\alpha}{A_+} x + \gamma,$$

для  $x > 0$ ,

$$p = \frac{\beta}{B_+} x + \pi$$

(13)

$$u = \frac{\alpha}{A_-} x + \gamma,$$

для  $x < 0$ .

$$p = \frac{\beta}{B_-} x + \pi$$

Мы исследуем, какое решение разностных уравнений будет получаться при тех же начальных условиях. Это тем более интересно, что любое гладкое решение нашей системы вблизи точки  $x = 0$ ,  $t = t_0$  может быть представлено в виде

$$u = \frac{\alpha}{A_+} x - \beta(t - t_0) + \gamma + O[x^2 + (t - t_0)^2],$$

при  $x > 0$ ,

$$p = \frac{\beta}{B_+} x - \alpha(t - t_0) + \pi + O[x^2 + (t - t_0)^2]$$

$$u = \frac{\alpha}{A_-} x - \beta(t - t_0) + \gamma + O[x^2 + (t - t_0)^2],$$

при  $x < 0$ .

$$p = \frac{\beta}{B_-} x - \alpha(t - t_0) + \pi + O[x^2 + (t - t_0)^2]$$

Поэтому поведение полученного разностного решения около  $x = 0$  будет характеризовать поведение вблизи контактного разрыва величин, получившихся в результате разностного расчета любого гладкого решения нашей системы.

Начнем с того, что приведем расчетные формулы разностной схемы для описываемого случая (как получаются эти формулы, объяснено в начале этого параграфа). Мы будем предполагать, что шаг  $h$ , равный разности координат  $x$  двух соседних целых точек, может быть различным для областей справа и слева от  $x = 0$ . Именно, для  $x > 0$   $h = h_+$ , а для  $x < 0$   $h = h_-$ .

Расчетные формулы:

$$\left. \begin{aligned}
 P_m &= \frac{p_{m-\frac{1}{2}} + p_{m+\frac{1}{2}}}{2} - \sqrt{\frac{A_+}{B_+}} \cdot \frac{u_{m+\frac{1}{2}} - u_{m-\frac{1}{2}}}{2}, \\
 U_m &= \frac{u_{m-\frac{1}{2}} + u_{m+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{p_{m+\frac{1}{2}} - p_{m-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\frac{A_+}{B_+}}}
 \end{aligned} \right\} \text{для } m > 0,$$

$$\left. \begin{aligned}
 P_m &= \frac{p_{m-\frac{1}{2}} + p_{m+\frac{1}{2}}}{2} - \sqrt{\frac{A_-}{B_-}} \cdot \frac{u_{m+\frac{1}{2}} - u_{m-\frac{1}{2}}}{2}, \\
 U_m &= \frac{u_{m-\frac{1}{2}} + u_{m+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{p_{m+\frac{1}{2}} - p_{m-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\frac{A_-}{B_-}}}
 \end{aligned} \right\} \text{для } m < 0,$$

$$\left. \begin{aligned}
 P_0 &= \frac{\sqrt{\frac{A_+}{B_+}} p_{-\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{A_-}{B_-}} p_{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{A_+}{B_+}} \sqrt{\frac{A_-}{B_-}} (u_{-\frac{1}{2}} - u_{\frac{1}{2}})}{\sqrt{\frac{A_+}{B_+}} + \sqrt{\frac{A_-}{B_-}}}, \\
 U_0 &= \frac{\sqrt{\frac{A_-}{B_-}} \cdot u_{-\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{A_+}{B_+}} \cdot u_{\frac{1}{2}} + p_{-\frac{1}{2}} - p_{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{A_+}{B_+}} + \sqrt{\frac{A_-}{B_-}}}, \\
 u_{m+\frac{1}{2}} &= u_{m+\frac{1}{2}} - \frac{\tau B_+}{h_+} (P_{m+1} - P_m), \\
 p_{m+\frac{1}{2}} &= p_{m+\frac{1}{2}} - \frac{\tau A_+}{h_+} (U_{m+1} - U_m)
 \end{aligned} \right\} \text{для } m \geq 0,$$

$$\left. \begin{aligned}
 u_{m+\frac{1}{2}} &= u_{m+\frac{1}{2}} - \frac{\tau B_-}{h_-} (P_{m+1} - P_m), \\
 p_{m+\frac{1}{2}} &= p_{m+\frac{1}{2}} - \frac{\tau A_-}{h_-} (U_{m+1} - U_m)
 \end{aligned} \right\} \text{для } m < 0.$$

(14)

У наших разностных уравнений можно найти решение, которое так же, как и (12), является линейной функцией  $x$  и  $t$  в каждой из областей  $x > 0$  и  $x < 0$  и имеет в этих областях одинаковые градиенты  $s$  (12). Именно, оказывается, что таким решением будет:

$$\left. \begin{aligned}
 u &= \frac{\alpha}{A_+} x - \beta t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta h_+}{\sqrt{A_+ B_+}} + \delta, \\
 p &= \frac{\beta}{B_+} x - \alpha t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha h_+}{\sqrt{A_+ B_+}} + \theta
 \end{aligned} \right\} \text{для } x > 0,$$

(15)

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\alpha}{A_-} x - \beta t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta h_-}{\sqrt{A_- B_-}} + \delta, \\ p &= \frac{\beta}{B_-} x - \alpha t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha h_-}{\sqrt{A_- B_-}} + \theta \end{aligned} \right\} \text{ для } x < 0.$$

Совершенно элементарную проверку этого факта мы предоставляем читателю. Чтобы по приведенным формулам определить  $u^{m+\frac{1}{2}}$  и  $p^{m+\frac{1}{2}}$  на каком-либо, например,  $n$ -ом шаге по времени, надо положить  $t = h\tau$ ,  $x = \left(m + \frac{1}{2}\right)h$ .

Если мы по нашей разностной схеме начнем расчет с начальных данных (13), то, как показывают численные эксперименты, около контактного разрыва устанавливается приведенное нами решение разностных уравнений с некоторыми  $\delta$  и  $\theta$ , вырабатывающимися в процессе установления.

Если мы по формулам (15) вычислим значения  $u$  и  $p$  при  $x = 0$ , то увидим, что эти величины принимают в этой точке справа и слева различные значения, разности между которыми составляют

$$\begin{aligned} [u] &= \frac{1}{2} \beta \left( \frac{h_+}{\sqrt{A_+ B_+}} - \frac{h_-}{\sqrt{A_- B_-}} \right), \\ [p] &= \frac{1}{2} \alpha \left( \frac{h_+}{\sqrt{A_+ B_+}} - \frac{h_-}{\sqrt{A_- B_-}} \right). \end{aligned}$$

На самом деле при решении разностных уравнений значения  $u$  и  $p$  мы вычисляем только в полужелых точках:  $-\frac{3}{2}h_-$ ,  $-\frac{1}{2}h_-$ ,  $\frac{1}{2}h_+$ ,  $\frac{3}{2}h_+$ , ..., и поэтому никакого реального разрыва давлений и скоростей мы на контактном разрыве не наблюдаем. Однако, если линейно экстраполировать давление и скорость в точку  $x = 0$ , то мы как раз и получим значения, вычисляемые по формулам (15) при  $x = 0$ .

Из сказанного нами следует, что величины давлений и скоростей, экстраполированные справа и слева, окажутся на контактном разрыве, вообще говоря, разными и разности между ними будут определяться по формулам:

$$\begin{aligned} u_{\text{прав. экстрап.}} - u_{\text{лев. экстрап.}} &= \frac{1}{2} \beta \left( \frac{h_+}{\sqrt{A_+ B_+}} - \frac{h_-}{\sqrt{A_- B_-}} \right), \\ p_{\text{прав. экстрап.}} - p_{\text{лев. экстрап.}} &= \frac{1}{2} \alpha \left( \frac{h_+}{\sqrt{A_+ B_+}} - \frac{h_-}{\sqrt{A_- B_-}} \right). \end{aligned} \tag{16}$$

Эта несогласованность скоростей и давлений на контактном разрыве особенно бросается в глаза на графиках  $u$  и  $p$  и, очевидно, характеризует неточность нашей схемы. В самом деле, если бы наша схема была на линейных функциях точна, то она рассчитала бы решение (12) точно, и никакой несогласованности  $u$  и  $p$  мы бы не заметили.

Чтобы бороться с этим эффектом, надо, по возможности, как это видно из формул (16), выбрать шаги  $h$  так, чтобы

$$\frac{h_+}{\sqrt{A_+ B_+}} \approx \frac{h_-}{\sqrt{A_- B_-}}.$$

Мы уже объясняли, что  $\frac{h}{\sqrt{AB}}$  представляет из себя наибольший допустимый шаг по времени, не нарушающий устойчивости разностной схемы. Таким образом, надо пытаться выбирать шаги по пространству так, чтобы наибольший шаг по времени, обеспечивающий устойчивость, был, по возможности, одинаковым или близким для газов по разные стороны от контактного разрыва.

Точное выполнение этого условия для нелинейных газодинамических задач невозможно, так как скорость звука, которая определяет шаг по времени \*, является на разных этапах задачи различной. Тем не менее, когда при расчетах нам удавалось выбрать шаги в разных областях так, чтобы это условие не очень сильно нарушалось, рассматриваемый эффект на средних границах почти не наблюдался, что свидетельствовало о повышении точности. Большую точность в этих случаях можно было отметить и при сравнении с методом характеристик.

#### § 8. Устойчивость нашей разностной схемы на контактных разрывах

В предыдущем параграфе мы привели формулы, по которым можно вести расчет решений наших уравнений вблизи контактного разрыва. Сейчас мы исследуем эти формулы на устойчивость. Это исследование мы проведем на разностной схеме для линейной системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

с постоянными (в каждой из областей  $x > 0$  или  $x < 0$ ) коэффициентами  $A$  и  $B$  (на такой же системе мы изучали в предыдущем параграфе описываемый там счетный эффект).

Следуя А. Ф. Филиппову (см. [4]), мы будем под устойчивостью понимать равномерно непрерывную (при измельчении сетки) зависимость решения разностных уравнений от правых частей и начальных данных.

Для того чтобы доказать устойчивость, нам будет достаточно определить для решений разностных уравнений такую норму, которая при измельчении сетки в пределе переходит в некоторую норму для решений дифференциальных уравнений, и такую, что

$$\|\vec{u}^{n+1}\| \leq \|\vec{u}^n\|.$$

\* Допустимый шаг по времени при решении уравнений газовой динамики мы определили в § 4 гл. II как  $\tau = \frac{h}{B \cdot \max(a_m, b_m)}$ . Для гладких решений, рассматриваемых в этом параграфе, при достаточно малых  $h$   $a_m$  и  $b_m$  примерно равны массовой скорости звука.

Под  $\vec{u}^n$  мы понимаем здесь бесконечномерный вектор, определяемый значениями решения  $\{u^n_{m+\frac{1}{2}}, p^n_{m+\frac{1}{2}}\}$  разностных уравнений на  $n$ -ом шаге по времени.

Мы будем предполагать, что шаг по времени выбран из условий устойчивости для счета внутри каждой из областей. Как было отмечено выше, это эквивалентно выполнению неравенств

$$r_+ = \frac{\tau\sqrt{A_+B_+}}{h_+} \leq 1, \quad r_- = \frac{\tau\sqrt{A_-B_-}}{h_-} \leq 1.$$

Введем обозначения:

$$q^n_{m+\frac{1}{2}} = u^n_{m+\frac{1}{2}} + \frac{p^n_{m+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{A}{B}}}, \quad s^n_{m+\frac{1}{2}} = u^n_{m+\frac{1}{2}} - \frac{p^n_{m-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{A}{B}}}.$$

Из формул (14) предыдущего параграфа без особого труда можно получить, что имеют место следующие равенства:

$$q^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} = (1 - r_+)q^n_{m+\frac{1}{2}} + r_+q^n_{m-\frac{1}{2}} \quad \text{для } m \geq 1,$$

$$q^{n+1}_{\frac{1}{2}} = (1 - r_+)q^n_{\frac{1}{2}} + r_+ \frac{2\sqrt{\frac{A_-}{B_-}}}{\sqrt{\frac{A_+}{B_+}} + \sqrt{\frac{A_-}{B_-}}} \cdot q^n_{-\frac{1}{2}} + r_+ \frac{\sqrt{\frac{A_+}{B_+}} - \sqrt{\frac{A_-}{B_-}}}{\sqrt{\frac{A_+}{B_+}} + \sqrt{\frac{A_-}{B_-}}} \cdot s^n_{\frac{1}{2}},$$

$$q^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} = (1 - r_-)q^n_{m+\frac{1}{2}} + r_-q^n_{m-\frac{1}{2}} \quad \text{для } m \leq -1,$$

$$s^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} = (1 - r_+)s^n_{m+\frac{1}{2}} + r_+s^n_{m+\frac{3}{2}} \quad \text{для } m \geq 0,$$

$$s^{n+1}_{-\frac{1}{2}} = (1 - r_-)s^n_{-\frac{1}{2}} + r_- \frac{2\sqrt{\frac{A_+}{B_+}}}{\sqrt{\frac{A_+}{B_+}} + \sqrt{\frac{A_-}{B_-}}} s^n_{\frac{1}{2}} + r_- \frac{\sqrt{\frac{A_-}{B_-}} - \sqrt{\frac{A_+}{B_+}}}{\sqrt{\frac{A_+}{B_+}} + \sqrt{\frac{A_-}{B_-}}} q^n_{-\frac{1}{2}},$$

$$s^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} = (1 - r_-)s^n_{m+\frac{1}{2}} + r_-s^n_{m+\frac{3}{2}} \quad \text{для } m \leq -2.$$

Все дальнейшие рассуждения мы будем проводить в предположении, что  $\sqrt{\frac{A_+}{B_+}} > \sqrt{\frac{A_-}{B_-}}$ . Совершенно аналогичное рассмотрение случая  $\sqrt{\frac{A_+}{B_+}} < \sqrt{\frac{A_-}{B_-}}$  мы предоставляем читателю.

Положим

$$\bar{q}^k_{m+\frac{1}{2}} = q^k_{m+\frac{1}{2}} \quad \text{для всех } m,$$

$$\bar{s}^k_{m+\frac{1}{2}} = s^k_{m+\frac{1}{2}} \quad \text{для } m \geq 0,$$

$$\bar{s}^k_{m+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{A_+}{B_+}} + \sqrt{\frac{A_-}{B_-}}}{3\sqrt{\frac{A_+}{B_+}} - \sqrt{\frac{A_-}{B_-}}} \cdot s^k_{m+\frac{1}{2}} \quad \text{для } m < 0.$$

Из формул для  $q^{n+1}_{m+\frac{1}{2}}$  и  $s^{n+1}_{m+\frac{1}{2}}$  следуют аналогичные формулы для  $\bar{q}^{n+1}_{m+\frac{1}{2}}$  и  $\bar{s}^{n+1}_{m+\frac{1}{2}}$ . Мы приводим их ниже:

$$\bar{q}^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} = (1 - r_+) \bar{q}^n_{m+\frac{1}{2}} + r_+ \bar{q}^n_{m-\frac{1}{2}} \quad \text{для } m \geq 1,$$

$$\bar{q}^{n+1}_{\frac{1}{2}} = (1 - r_+) \bar{q}^n_{\frac{1}{2}} + r_+ \frac{2\sqrt{\frac{A_-}{B_-}}}{\sqrt{\frac{A_+}{B_+}} + \sqrt{\frac{A_-}{B_-}}} \bar{q}^n_{-\frac{1}{2}} + r_+ \frac{\sqrt{\frac{A_+}{B_+}} - \sqrt{\frac{A_-}{B_-}}}{\sqrt{\frac{A_+}{B_+}} + \sqrt{\frac{A_-}{B_-}}} \bar{s}^n_{\frac{1}{2}},$$

$$\bar{q}^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} = (1 - r_-) \bar{q}^n_{m+\frac{1}{2}} + r_- \bar{q}^n_{m-\frac{1}{2}} \quad \text{для } m \leq -1,$$

$$\bar{s}^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} = (1 - r_+) \bar{s}^n_{m+\frac{1}{2}} + r_+ \bar{s}^n_{m+\frac{3}{2}} \quad \text{для } m \geq 0,$$

$$\bar{s}^{n+1}_{-\frac{1}{2}} = (1 - r_-) \bar{s}^n_{-\frac{1}{2}} + r_- \frac{2\sqrt{\frac{A_+}{B_+}}}{3\sqrt{\frac{A_+}{B_+}} - \sqrt{\frac{A_-}{B_-}}} \bar{s}^n_{\frac{1}{2}} - r_- \frac{\sqrt{\frac{A_+}{B_+}} - \sqrt{\frac{A_-}{B_-}}}{3\sqrt{\frac{A_+}{B_+}} - \sqrt{\frac{A_-}{B_-}}} \bar{q}^n_{-\frac{1}{2}},$$

$$\bar{s}^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} = (1 - r_-) \bar{s}^n_{m+\frac{1}{2}} + r_- \bar{s}^n_{m+\frac{3}{2}} \quad \text{для } m \leq -2.$$

Так как сумма абсолютных величин коэффициентов при  $\bar{q}$  и  $\bar{s}$  в правых частях каждого из этих равенств равна единице (напомним, что  $r_+$  и  $r_-$  меньше 1), то

$$\max_m \left( \left| \bar{q}^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} \right|, \left| \bar{s}^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} \right| \right) \leq \max_m \left( \left| \bar{q}^n_{m+\frac{1}{2}} \right|, \left| \bar{s}^n_{m+\frac{1}{2}} \right| \right).$$

Это неравенство и доказывает устойчивость, если в качестве нормы выбрать

$$\|\vec{u}^n\| = \max_m \left( \left| \bar{q}^n_{m+\frac{1}{2}} \right|, \left| \bar{s}^n_{m+\frac{1}{2}} \right| \right).$$

Доказанная устойчивость разностной схемы для линейных уравнений может служить некоторым оправданием применения ее и в случае нелинейной системы. Отметим, кроме того, еще раз, что во всех многочисленных вычислениях по рассматриваемой схеме, проводившихся с учетом наших ограничений на шаг по времени, счет всегда был устойчив.

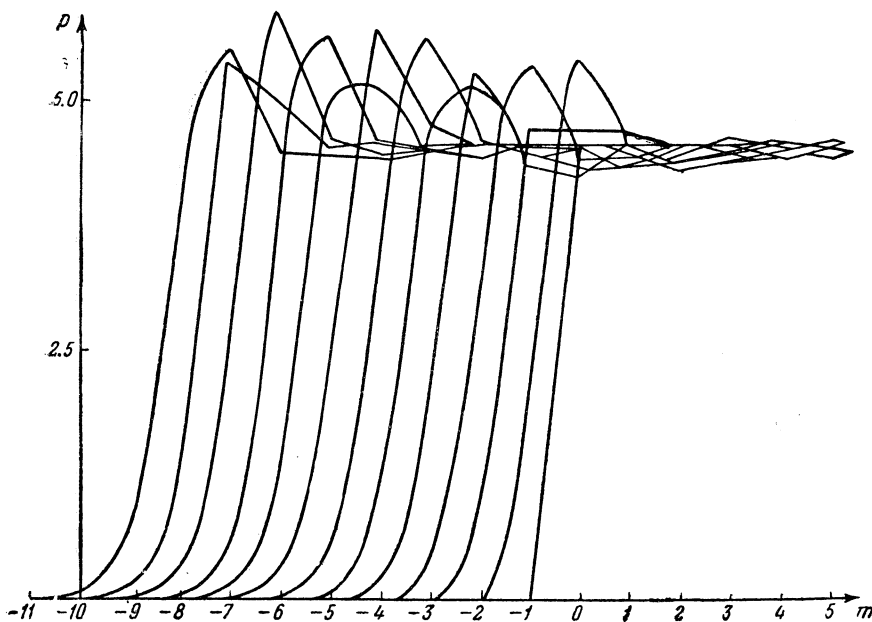


Приложение I

Ниже (фиг. 2) приводится график давлений в стационарной ударной волне для системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p(v)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$



Фиг. 2

рассчитанный по схеме второго порядка точности:

$$u^0 = u_0 - \frac{\tau}{2h} (p_1 - p_{-1}) + \frac{\tau^2}{2h^2} \left[ \frac{A_1 + A_0}{2} (u_1 - u_0) - \frac{A_0 + A_{-1}}{2} (u_0 - u_{-1}) \right],$$

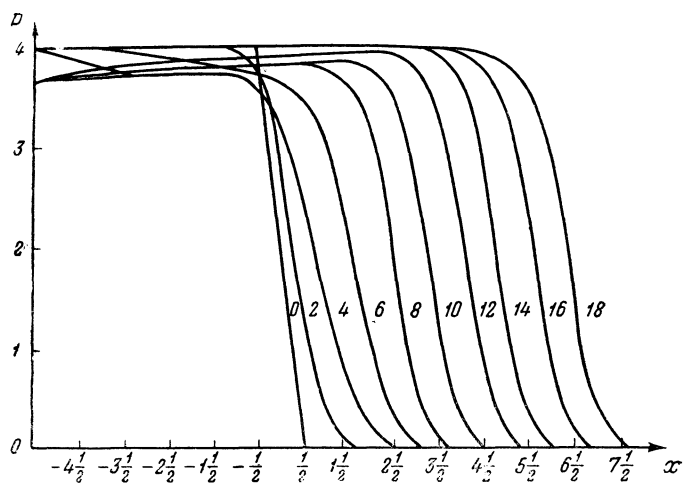
$$v^0 = v_0 + \frac{\tau}{2h} (u_1 - u_{-1}) + \frac{\tau^2}{2h^2} (p_1 - 2p_0 + p_{-1}),$$

где

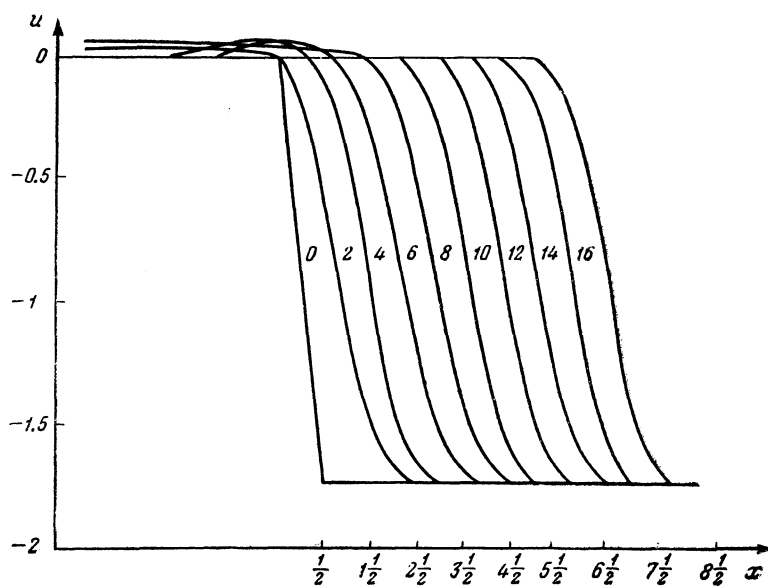
$$A = - \frac{dp}{dv}.$$

Приложение II

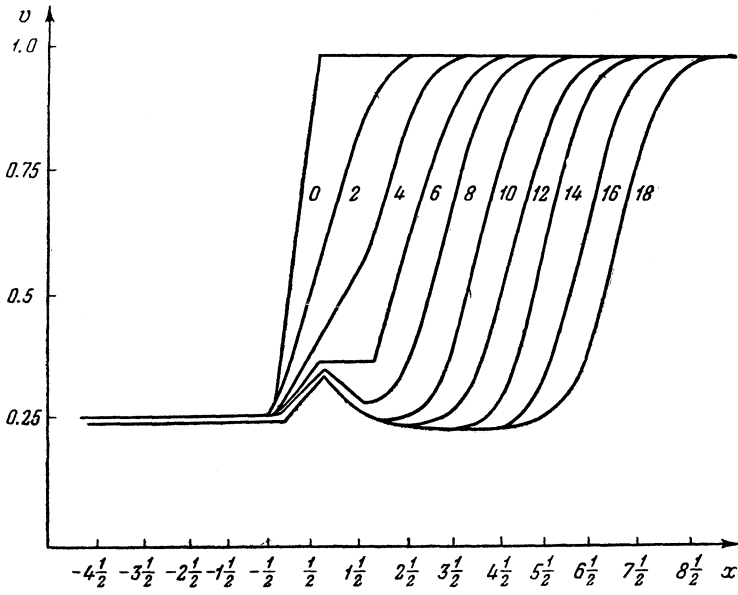
Расчет стационарной ударной волны для газа с  $\gamma = \frac{5}{3}$ .  
 Цифры около графиков (фиг. 3, 4, 5) означают номера слоев.



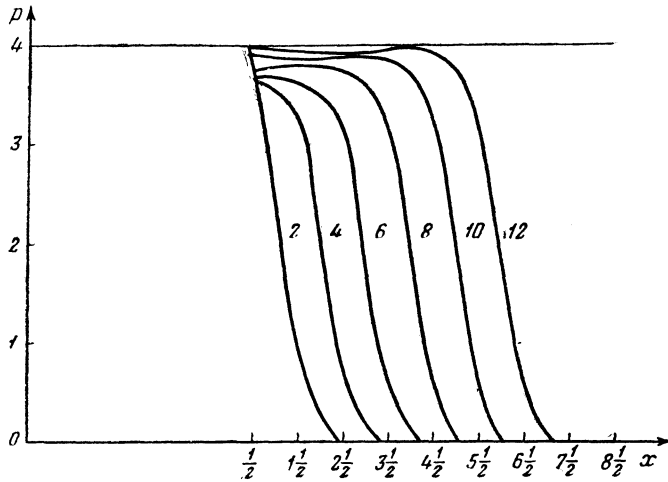
Фиг. 3



Фиг. 4



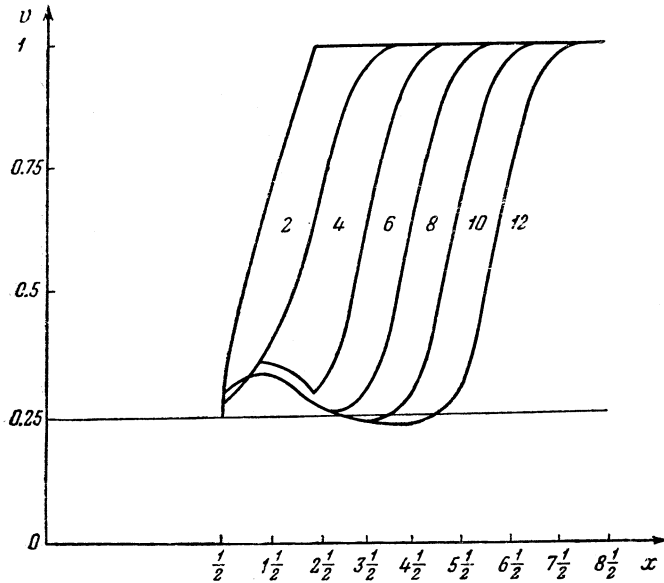
Фиг. 5



Фиг. 6

Приложение III

Удар движущегося абсолютно холодного газа ( $\gamma = \frac{5}{3}$ ) о стенку. В начальный момент было задано  $v = 1$ ,  $p = 0$  при  $x > 0$ . При  $x = 0$  было поставлено граничное условие  $U = 0$ , которое учитывалось при расчете распадов разрывов в этой точке.



Фиг. 7

На приведенных графиках (фиг. 6, 7) видно, как формируется ударная волна, идущая вправо.

(Поступило в редакцию 20/III 1956 г.)

#### Литература

1. J. Neumann, R. Richtmyer, A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks, Journ. Appl. Physics, **21**, № 3 (1950), 232—237.
2. P. D. Lax, Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation, Communic. on pure and appl. Math., **VII**, N 1 (1954), 159—193.
3. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Москва, Гостехиздат, 1955.
4. А. Ф. Филиппов, Об устойчивости разностных уравнений, ДАН СССР, т. **100**, № 6 (1955), 1045—1048.